

绝密★启用前

2020 年全国硕士研究生招生考试

数学（三）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 考生须把试题册上的“试卷条形码”粘贴条取下，粘贴在答题卡的“试卷条形码粘贴位置”框中。不按规定粘贴条形码而影响评卷结果的，责任由考生自负。
3. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
4. 填(书)写部分必须使用黑色字迹签字笔或者钢笔书写，字迹工整、笔记清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
5. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

（以下信息考生必须认真填写）

考生编号																				
考生姓名																				

一. 选择题: 第1-8小题为选择题, 每小题4分, 共32分。下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的。

1. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - a}{x - a} = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} =$

- A. $b \sin a$
- B. $b \cos a$
- C. $b \sin f(a)$
- D. $b \cos f(a)$

2. $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为

- A.1
- B.2
- C.3
- D.4

3. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数, 则

- A. $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是奇函数
- B. $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是偶函数
- C. $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是奇函数
- D. $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是偶函数

4. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2, 6)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$ 的收敛区间为

- A. $(-2, 6)$
- B. $(-3, 1)$
- C. $(-5, 3)$
- D. $(-17, 15)$

5. 设4阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $A^*x=0$ 的通解为

- A. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数
- B. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数
- C. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数
- D. $x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数

6. 设 A 为3阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的属于特征值1的线性无关的特征向量, α_3 为 A 的属于特征值-1的特征向量, 则满足

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 可为

- A. $(\alpha_1+\alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3)$
- B. $(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3)$
- C. $(\alpha_1+\alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2)$
- D. $(\alpha_1+\alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$

7. 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为

- A. $\frac{3}{4}$
- B. $\frac{2}{3}$
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{5}{12}$

8. 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N\left(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2}\right)$, 则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$
- B. $\frac{\sqrt{7}}{7}(X-Y)$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

二. 填空题: 第9-14小题为填空题, 每小题4分, 共24分。

9. (其他(高考填空)) 设 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$, 则 $dz|_{(0,\pi)} =$ _____。
10. (其他(高考填空)) 曲线 $x+y+e^{2xy} = 0$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程为_____。
11. (其他(高考填空)) 设 Q 表示产量, 成本为 $C(Q) = 100 + 13Q$, 单价为 F , 需求量 $Q(P) = \frac{800}{P+3} - 2$. 则工厂取得利润最大时的产量为_____。

12. (其他(高考填空)) 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$, 则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体体积为_____。

13. (其他(高考填空))
$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$$
 行列式 _____。

14. (其他(高考填空)) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ 。 Y 表示 X 被 3 除的余数, 则 $E(Y) =$ _____。

三. 解答题: 第15-23小题为计算题, 第15-19小题每小题10分, 第20-23小题每小题11分, 共94分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (计算题) 已知 a, b 为常数, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在当 $n \rightarrow \infty$ 时是等价无穷小, 求 a, b 。
16. (计算题) 求二元函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值。

17. (计算题) 设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$, 且 $f(0)=1, f'(0)=-1$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 设 $a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(x)dx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 。

18. (计算题)

设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, 连续函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x, y) = y\sqrt{1-x^2} + x \iint_D f(x, y) dx dy$, 求 $\iint_D xf(x, y) dx dy$ 。

19. (计算题)

设 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in [0, 2]} \{|f(x)|\}$ 。证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$;

(2) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$ 。

20. (计算题)

$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$, 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 得 $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$,

$a \geq b$;

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求正交矩阵 Q 。

21. (计算题) 设 A 为 2 阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量。

(1) 证明 P 为可逆矩阵;

(2) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵。

22. (计算题) 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$Z_1 = \begin{cases} 1, X-Y > 0 \\ 0, X-Y \leq 0 \end{cases}, \quad Z_2 = \begin{cases} 1, X+Y > 0 \\ 0, X+Y \leq 0 \end{cases}。$$

(1) 求二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的概率分布;

(2) 求 Z_1 与 Z_2 的相关系数。

23. (计算题)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为 $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, t \geq 0 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ, m 为参数且大于零。

(1) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s+t \mid T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 t_1, t_2, \dots, t_n 。若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$ 。