绝密★启用前

2025年全国硕士研究生招生考试

数学（二）

（科目代码：302）

考生注意事项

1.答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。

2.考生须把试题册上的“试卷条形码”粘贴条取下，粘贴在答题卡的“试卷条形码粘贴位置”框中。不按规定粘贴条形码而影响评卷结果的，责任由考生自负。

3.选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。

4.填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔或者钢笔书写，字迹工整、笔记清楚；涂写部分必须使用2B铅笔填涂。

5.考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

（以下信息考生必须认真填写）

考生编号															
考生姓名															

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目

要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

1.设函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_{y}^{x}e^{-t^2}dt=0$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$(　　)

A. $\frac{z}{z+1}(e^{-x^2}-e^{-y^2})$　　B. $\frac{z}{z+1}(e^{-x^2}+e^{-y^2})$

C. $-\frac{z}{z+1}(e^{-x^2}-e^{-y^2})$　　D. $-\frac{z}{z+1}(e^{-x^2}+e^{-y^2})$

2.已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t dt$， $g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin^2 x$, 则(　　)

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点

B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

3.如果对微分方程 $y''-2ay'+(a+2)y=0$ 的任一解 $y(x)$，反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 均收敛，那么 a 的取值范围是(　　)

A. $(-2,-1]$　　B. $(-\infty,-1]$

C. $(-2,0)$　　D. $(-\infty,0)$

4.设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 的某去心邻域内有定义且恒不为零.若当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时，(　　)

A. $f(x)+g(x)=o(g(x))$　　B. $f(x)g(x)=o(f^2(x))$

C. $f(x)=o(e^{g(x)}-1)$　　D. $f(x)=o(g^2(x))$

5.设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_{-2}^{2}dx\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)dy=$(　　)

A. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)dx\right]dy$

B. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f(x,y)dx\right]dy$

C. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)dx+\int_{2}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx\right]dy$

D. $2\int_0^4 dy\int_{\sqrt{4-y}}^{2} f(x,y)dx$

6.设单位质点P,Q分别位于点$(0,0)$和$(0,1)$处，P从点$(0,0)$出发沿x轴正向移动，记G为引力常量，则当质点P移动到点$(l,0)$时，克服质点Q的引力所做的功为(　　)

A. $\int_0^l \frac{G}{x^2+1}dx$　　　　B. $\int_0^l \frac{Gx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

C. $\int_0^l \frac{G}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}dx$　　　　D. $\int_0^l \frac{G\left(x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

7.设函数$f(x)$连续，给出下列四个条件

①$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left|f\left(x\right)\right|-f\left(0\right)}{x}$存在；②$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-\left|f\left(0\right)\right|}{x}$存在；

③$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left|f\left(x\right)\right|}{x}$存在；④$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left|f\left(x\right)\right|-\left|f\left(0\right)\right|}{x}$存在；

其中能得到“$f(x)$在$x=0$处可导”的条件个数是(　　)

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

8.设矩阵$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$有一个正特征值和两个负特征值，则(　　)

A. $a>4,b>0$　　　　B. $a<4,b>0$

C. $a>4,b<0$　　　　D. $a<4,b<0$

9.下列矩阵中，可以经过若干初等行变换得到矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$的是(　　)

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

10.设 3 阶矩阵 A, B 满足 $r(AB) = r(BA) + 1$, 则(　　)

A.方程组 $(A+B)x = 0$ 只有零解

B.方程组 $Ax = 0$ 与方程组 $Bx = 0$ 均只有零解

C.方程组 $Ax = 0$ 与方程组 $Bx = 0$ 没有公共非零解

D.方程组 $ABAx = 0$ 与方程组 $BABx = 0$ 有公共非零解

二、填空题:11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11.设 $\int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \ln 2$, 则 $a =$_________.

12.曲线 $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1}$ 的渐近线方程为________.

13. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \left[\ln \frac{1}{n} + 2 \ln \frac{2}{n} + \cdots + (n-1) \ln \frac{n-1}{n} \right] =$_________.

14.已知函数 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \ln(1+2t) \\ 2t - \int_1^{y+t^2} e^{-u^2} du = 0 \end{cases}$ 确定，则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} =$_________.

15.微分方程 $(2y-3x)dx + (2x-5y)dy = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解为________.

16.设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$，若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$，则方程组 $Ax = \alpha_1 + 4\alpha_4$ 的通解为 $x =$_________.

三、解答题:17～22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

计算$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}dx.$

18. (本题满分 12 分)

设函数$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3,$证明$f(x)$在$x=0$处可导，并求$f'(0)$.

19. (本题满分 12 分)

设函数$f(x,y)$可微且满足$df(x,y)=-2xe^{-y}dx+e^{-y}\left(x^2-y-1\right)dy$，$f(0,0)=2,$求$f(x,y),$并求$f(x,y)$的极值.

20. (本题满分 12 分)

已知平面有界区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4x,x^2+y^2\le 4y\right\},$计算$\iint\limits_D (x-y)^2 dxdy.$

21. (本题满分 12 分)

设函数$f(x)$在区间(a,b)内可导，证明导函数$f'(x)$在(a,b)内严格单调增加的充分必要条件是：

对(a,b)内任意的x_1,x_2,x_3，当$x_1<x_2<x_3$时，$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$

22. (本题满分 12 分)

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&1&1\\-2&1&a\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}k&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}$合同.

(1)求a的值及k的取值范围；

(2)若存在正交矩阵$Q,$使得$Q^TAQ=B,$求k及$Q.$