绝密★启用前

2020年全国硕士研究生招生考试

数学（一）

（科目代码：301）

考生注意事项

1.答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。

2.考生须把试题册上的“试卷条形码”粘贴条取下，粘贴在答题卡的“试卷条形码粘贴位置”框中。不按规定粘贴条形码而影响评卷结果的，责任由考生自负。

3.选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。

4.填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔或者钢笔书写，字迹工整、笔记清楚；涂写部分必须使用2B铅笔填涂。

5.考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

（以下信息考生必须认真填写）

考生编号															
考生姓名															

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. $x \to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶是（　）

A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right)dt$　　B. $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$　　D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin t^3}dt$

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则（　）

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

B. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，$f(0,0)=0$，$n=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Big|_{(0,0)}$ 非零向量 d 与 n 垂直，则（　）

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|n\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在.　　B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|n\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在.

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|d\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在.　　D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|d\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

4. 设 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n r^n$ 的收敛半径，r 是实数，则（　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n r^n$ 发散时，$|r|\ge R$.　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n r^n$ 发散时，$|r|\le R$.

C. $|r|\ge R$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n r^n$ 发散.　　D. $|r|\le R$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n r^n$ 发散.

5. 若矩阵 A 经初等列变换化成 B，则（　）

A. 存在矩阵 P，使得 $PA=B$.　　B.存在矩阵 P，使得 $BP=A$.

C.存在矩阵 P，使得 $PB=A$.　　D. 方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

6. 已知直线$L_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{2-c_2}{c_1}$与直线$L_2:\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{2-c_3}{c_2}$相交于一点，法向量$\alpha_i=\begin{bmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{bmatrix}$，$i=1,2,3$. 则

A. a_1可由a_2,a_3线性表示.　　B. a_2可由a_1,a_3线性表示.

C. a_3可由a_1,a_2线性表示.　　D. a_1,a_2,a_3线性无关.

7. 设A，B，C为三个随机事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则$A$，$B$，$C$中恰有一个事件发生的概率为

A. $\dfrac{3}{4}$.　　B. $\dfrac{2}{3}$.　　C. $\dfrac{1}{2}$.　　D. $\dfrac{5}{12}$.

8. 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为来自总体X的简单随机样本，其中$P(X=0)=P(X=1)=\dfrac{1}{2}$，$\Phi(x)$表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得$P\left(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\le 55\right)$的近似值为

A. $1-\Phi(1)$.　　B. $\Phi(1)$.　　C. $1-\Phi(0,2)$.　　D. $\Phi(0,2)$.

二、填空题：9~14 小题，每小题 2 分，共 24 分.请将解答写在答题纸指定位置上.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$________.

10. 设$\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\end{cases}$，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$________.

11. 若函数$f(x)$满足$f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0)$，且$f(0)=m$，$f'(0)=n$，则$\int_0^{+\infty}f(x)dx=$________.

12. 设函数$f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt$，则$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}=$________.

13. 行列式$\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$________.

14. 设 x 顺从区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布，$Y=\sin X$，则 $Cov(X,Y)=$________.

三、**解答题：15~23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15. （本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

16. （本题满分 10 分）

计算曲线积分 $I=\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y}dy$，其中 L 是 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

17. （本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$，证明：当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 收敛，并求其和函数.

18. （本题满分 10 分）

设 Σ 为由面 $Z=\sqrt{x^2+y^2}\ (1\le x^2+y^2\le 4)$ 的下侧，$f(x)$ 是连续函数，计算

$$I=\iint_{\Sigma}\left[xf(xy)+2x-y\right]dydz+\left[yf(xy)+2y+x\right]dzdx+\left[zf(xy)+z\right]dxdy$$

19. （本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max_{x\in(0,2)}\{|f(x)|\}$，

证明：(1) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\ge M$；(2) 若对任意的 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\le M$，则 $M=0$.

20. （本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型

$g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\ge b$.

(1)求 a，b 的值；(2)求正交矩阵 Q.

21. （本题满分 11 分）

设 A 为 2 阶矩阵，$P=\left(\alpha, A\alpha\right)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

（1）证明 P 为可逆矩阵；

（2）若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

22. （本题满分 11 分）

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y=X_3X_1+\left(1-X_3\right)X_2$.

（1）求二维随机变量 $\left(X_1,Y\right)$ 的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi\left(x\right)$ 表示.

（2）证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

23. （本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F\left(t\right)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geq 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 θ，m 为参数且大于零.

（1）求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>S+t\mid T>S\}$，其中 $S>0$，$t>0$.

（2）任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.