2020年全国硕士研究生招生考试数学（一）试题参考答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. $x \to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶是（　）

A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right)dt$　　　　B. $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$　　　　D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin t^3}dt$

【答案】D

【解析】(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$，可知 $x\to 0^+$，$\int_0^x (e^{t^2}-1)dt \sim \dfrac{1}{3}x^3$，

(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt}{x^{\frac{5}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x^3})}{\frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{5}$，可知 $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt \sim \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$， $x\to 0^+$

(C) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(\sin^2 x)\cdot\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{3}=\dfrac{1}{3}$，可知 $\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt \sim \dfrac{1}{3}x^3$，

$x\to 0^+$

(D) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^3}dt}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{\sin^3(1-\cos x)}\sin x}{5x^4}=\dfrac{\sqrt{(1-\cos x)^3}\sin x}{5x^4}=\dfrac{1}{10\sqrt{2}}$，可知

$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^3}dt \sim \dfrac{1}{10\sqrt{2}}x^5$， $x\to 0^+$

通过对比，$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^3}dt$ 的阶数最高，故选 (D)

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则（　）

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

B. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$.

【答案】C　【解析】当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，由 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，且

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，也即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$，故选 C

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，$f(0,0)=0$，$n=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Bigg|_{(0,0)}$ 非零向量 d 与 n 垂直，则（　）

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|n\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在.

B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|n\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在.

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|d\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在.

D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|d\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

【答案】A

【解析】函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，$f(0,0)=0$，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

由于 $n\cdot(x,y,f(x,y))=f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y-f(x,y)$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|n\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\text{存在}$$

4. 设 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 的收敛半径，r 是实数，则（　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 发散时，$|r|\ge R$.

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 发散时，$|r|\le R$.

C. $|r|\ge R$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 发散.

D. $|r|\le R$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 发散.

【答案】A

【解析】R 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 的收敛半径，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 在 $(-R,R)$ 必收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 发散

时，$|r| \geq R$.故选 A

5. 若矩阵 A 经初等列变换化成 B，则（　）

A. 存在矩阵 P，使得 $PA = B$.　　B.存在矩阵 P，使得 $BP = A$.

C.存在矩阵 P，使得 $PB = A$.　　D. 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

【答案】B

【解析】A 经过初等列变换化成 B，存在可逆矩阵 P_1 使得 $AP_1 = B$,令 $P_1^{-1} = P$，得出 $A = BP$,故选 B

6. 已知直线 $L_1: \dfrac{x-a_2}{a_1} = \dfrac{y-b_2}{b_1} = \dfrac{2-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \dfrac{x-a_3}{a_2} = \dfrac{y-b_3}{b_2} = \dfrac{2-c_3}{c_2}$ 相交于一点，法向量 $\alpha_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}$，$i = 1,2,3$. 则

A. a_1 可由 a_2, a_3 线性表示.　　B. a_2 可由 a_1, a_3 线性表示.

C. a_3 可由 a_1, a_2 线性表示.　　D. a_1, a_2, a_3 线性无关.

【答案】C

【解析】令 $L_1: \dfrac{x-a_2}{a_1} = \dfrac{y-b_2}{b_1} = \dfrac{2-c_2}{c_1} = t$，即有 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \alpha_2 + t\alpha_1$

由 L_2 方程得 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \alpha_3 + t\alpha_2$，两条线相交，得 $\alpha_2 + t\alpha_1 = \alpha_3 + t\alpha_2$

即 $\alpha_2 + t\alpha_1 - t\alpha_2 = \alpha_3 \Leftrightarrow t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2 = \alpha_3$，故选 C

7. 设 A，B，C 为三个随机事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{4}$，$P(AB) = 0$，$P(AC) = P(BC) = \dfrac{1}{12}$，则 A，B，C 中恰有一个事件发生的概率为

A. $\dfrac{3}{4}$.　　B. $\dfrac{2}{3}$.　　C. $\dfrac{1}{2}$.　　D. $\dfrac{5}{12}$.

【答案】D

【解析】$P(A\bar{B}\bar{C}) = P(A\overline{BUC}) = P(A) - P(A(BUC))$

$= P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) = \dfrac{1}{4} - 0 - \dfrac{1}{12} + 0 = \dfrac{1}{6}$

$$P(B\overline{A}\overline{C})=P(B\overline{AUC})=P(B)-P(B(AUC))$$

$$=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)=\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{6}$$

$$P(C\overline{A}\overline{B})=P(C\overline{AUB})=P(B)-P(C(AUB))$$

$$=P(C)-P(CB)-P(CA)+P(ABC)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{12}$$

所以 $P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$

8. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$，$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\right)$ 的近似值为

A. $1-\Phi(1)$.　　B. $\Phi(1)$.　　C. $1-\Phi(0,2)$.　　D. $\Phi(0,2)$.

【答案】B

【解析】由题意 $EX=\frac{1}{2}$，$DX=\frac{1}{4}$,根据中心极限定理 $\sum_{i=1}^{100}X_i\sim N(50,25)$，

所以 $P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-50}{\sqrt{25}}\le\frac{55-50}{\sqrt{25}}\right)=\Phi(1)$

二、填空题：9~14 小题，每小题 2 分，共 24 分.请将解答写在答题纸指定位置上.

9. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=$ ________.

【答案】-1

【解析】$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{(e^x-1)\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2-1-x-\frac{1}{2}x^2+1}{x^2}=-1$$

10. 设$\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \end{cases}$，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$________.

【答案】$-\sqrt{2}$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=\dfrac{1}{t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dt}\right)}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}$$

得$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=-\sqrt{2}$

11. 若函数$f(x)$满足$f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0)$，且$f(0)=m$，$f'(0)=n$，则$\int_0^{+\infty}f(x)dx=$________.

【答案】$n+am$

【解析】特征方程$\lambda^2+a\lambda+1=0$，则$\lambda_1+\lambda_2=-a,\ \lambda_1\cdot\lambda_2=1$，所以两个特征根都是负的。

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=-\int_0^{+\infty}\left[f''(x)+af'(x)\right]dx=-\left[f'(x)+af(x)\right]\Big|_0^{+\infty}=n+am$$

12. 设函数$f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt$，则$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}=$_______.

【答案】$4e$

【解析】$\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^{x(xy)^2}\cdot x$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^{x(xy)^2}\cdot x=3x^3e^{x^3y^2}+e^{x^3y^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}=4e$

13. 行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

【答案】a^4-4a^2

【解析】

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & a & -1 & 1-a^2 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$=-a\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2-a^2 \end{vmatrix} = -a\left[(a)\right]\left[(4-a^2)\right] = a^4 - 4a^2$$

14. 设 x 顺从区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布，$Y=\sin X$，则 $Cov(X,Y)=$________.

【答案】$\frac{2}{\pi}$

【解析】$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$$Cov\left(X,Y\right)=EXY-EXEY=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}x\sin xdx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}xdx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\sin xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}x\sin xdx=\frac{2}{\pi}$$

三、**解答题：15~23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

15. （本题满分 10 分）

求函数 $f\left(x,y\right)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

【答案】$-\frac{1}{216}$

【解析】令 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x=0 \end{cases}$ 得出 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或

$$\begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{12} \end{cases} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x=A,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1=B,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y=C$$

当$x=0,y=0$时，$AC-B^2<0$

当$x=\dfrac{1}{6},y=\dfrac{1}{12}$时，$A=1,B=-1,C=4$, $AC-B^2>0$

所以$f(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12})=\left(\dfrac{1}{6}\right)^3+8\left(\dfrac{1}{12}\right)^3-6\cdot\dfrac{1}{12}=-\dfrac{1}{216}$

16. （本题满分 10 分）

计算曲线积分$I=\int_L\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\dfrac{x+y}{4x^2+y}dy$，其中$L$是$x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

【答案】π

【解析】$P=\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2},Q=\dfrac{x+y}{4x^2+y}$，且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-4x^2+y^2-8xy}{(4x^2+y^2)^2}$

取逆时针方向L_1 $4x^2+y^2=\xi^2$，则

$$I=\int_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y}=\int_{L-L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y}dy+\int_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y}dy$$

$$=\int_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y}dy=\frac{1}{\xi^2}\int_{L_1}(4x-y)dx+(x+y)dy=\frac{2}{\xi^2}\iint_D dxdy=\frac{2}{\xi^2}\pi\frac{\xi}{2}\xi=\pi$$

17. （本题满分 10 分）

设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,(n+1)a_{n+1}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)a_n$，证明：当$|x|<1$时幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛，并求其和函数.

【解析】根据$(n+1)a_{n+1}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)a_n\Rightarrow\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\right|=1$

所以收敛半径为$R=\dfrac{1}{\rho}=1$，所以当$|x|<1$时幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛。

令$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=a_1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+\dfrac{1}{2})a_nx^n$

$=1+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_nx^n=1+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\frac{1}{2}s(x)$

所以 $s'(x)=1+xs'(x)+\frac{1}{2}s(x)$ 整理为 $(1-x)s'(x)-\frac{1}{2}s(x)=1$，即

$s'(x)-\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)}s(x)=\frac{1}{(1-x)}$，解得 $s(x)=-2+\frac{c}{\sqrt{1-x}}$，根据 $s(0)=2$，得出

$s(x)=-2+\frac{2}{\sqrt{1-x}}$

18. （本题满分 10 分）

设 Σ 为由面 $Z=\sqrt{x^2+y^2}\left(1\le x^2+y^2\le 4\right)$ 的下侧，$f\left(x\right)$ 是连续函数，计算

$I=\iint\limits_{\Sigma}\left[xf\left(xy\right)+2x-y\right]dydz+\left[yf\left(xy\right)+2y+x\right]dzdx+\left[zf\left(xy\right)+z\right]dxdy$.

【答案】$\frac{14\pi}{3}$

【解析】$Z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},Z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$I=\iint\limits_{\Sigma}\left[xf\left(xy\right)+2x-y\right]dydz+\left[yf\left(xy\right)+2y+x\right]dzdx+\left[zf\left(xy\right)+z\right]dxdy$

$=\iint\limits_{D_{xy}}\left\{\left[xf\left(xy\right)+2x-y\right](Z'_x)+\left[yf\left(xy\right)+2y+x\right](Z'_y)-\left[zf\left(xy\right)+z\right]\right\}dxdy$

$=\iint\limits_{D_{xy}}\left\{\sqrt{x^2+y^2}\left[f\left(xy\right)+2\right]-\left[\sqrt{x^2+y^2}f\left(xy\right)+\sqrt{x^2+y^2}\right]\right\}dxdy$

$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2r^2dr=\frac{14\pi}{3}$

19. （本题满分 10 分）

设函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,2\right]$ 上具有连续导数，$f\left(0\right)=f\left(2\right)=0$，$M=\max\limits_{x\in\left(0,2\right)}\left\{\left|f\left(x\right)\right|\right\}$，

证明：(1) 存在 $\xi\in\left(0,2\right)$，使得 $\left|f'\left(\xi\right)\right|\ge M$；(2) 若对任意的 $x\in\left(0,2\right)$，$\left|f'\left(x\right)\right|\le M$，则 $M=0$.

【解析】(1) 由 $M=\max\limits_{x\in\left(0,2\right)}\left\{\left|f\left(x\right)\right|\right\}$，假设 $f(c)=M$

若 $c\in[0,1]$，则在 $[0,c]$ 使用拉格朗日，得 $f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c}=\frac{M}{c}\ge M$

若 $c\in[1,2]$，则在 $[c,2]$ 使用拉格朗日，得 $\left|f'(\xi)\right|=\left|\frac{f(2)-f(c)}{2-c}\right|=\left|\frac{-f(c)}{2-c}\right|=\left|\frac{-M}{2-c}\right|\ge M$

综上所述，存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $\left|f'(\xi)\right|\ge M$

(2)假设 $M>0$，则 $f(c)-f(0)=\int_0^c f'(x)dx\le\int_0^c\left|f'(x)\right|dx\le\int_0^c Mdx\le Mc$

$f(2)-f(c)=\int_c^2 f'(x)dx\le\int_c^2\left|f'(x)\right|dx\le\int_c^2 Mdx\le M(2-c)$

则 $2M<Mc+M(2-c)=2M$，假设不成立，所以 $M=0$.

20.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\ge b$.

(1)求 a，b 的值；(2)求正交矩阵 Q.

【答案】(1) $\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$,

【解析】(1) $f=x^TAx$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$,经过正交变换 $x=Qy$，

$f=(Qy)^TA(Qy)=y^T(Q^TAQ)y=y^TBy$,其中 $B=\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix}$，其中 $B=Q^TAQ$，

所以 A,B 相似且合同，故 $\begin{cases}tr(A)=tr(B)\\|A|=|B|\end{cases}$，得出 $\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$

(2)设 $P_1^{-1}AP_1=\wedge,P_2^{-1}BP_2=\wedge$,则 $(P_1P_2^{-1})A(P_1P_2^{-1})=B$，所以 $Q=P_1P_2^{-1}$

$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-4\end{vmatrix}$，得出 $\lambda_1=0,\lambda_2=5$

$(0E-A)=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}$，故 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$(5E-A)=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}$，故 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$，故 $P_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$

$(0E-B)=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，故 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$

$(5E-B)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，故 $\beta_2=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$，故 $P_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

故 $Q=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{4}{5} & -\dfrac{3}{5}\\ -\dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5}\end{pmatrix}$

21. （本题满分 11 分）

设 A 为 2 阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

（1）证明 P 为可逆矩阵；

（2）若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

【解析】(1) α 是非零向量且不是 A 的特征向量.,则 $A\alpha\neq k\alpha$，所以 $A\alpha$ 与 α 线性无关，所以 $r(P)=2$，即 P 为可逆矩阵。

(2)由 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，即 $(A^2+A-6E)\alpha=0$，α 是非零向量，所以

$(A^2+A-6E)x=0$ 有非零解，故 $\left|A^2+A-6E\right|=0$，即 $\left|(A+3E)(A-2E)\right|=0$

得 $(A+3E)=0$或$(A-2E)=0$，若 $(A+3E)\neq 0$，则有 $(A-2E)\alpha=0$，得出 $A\alpha=2\alpha$，

与题意矛盾，故 $\left|A+3E\right|=0$，同理可得 $\left|A-2E\right|=0$，特征值为 3,2，所以可以对角化。

22. （本题满分 11 分）

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

（1）求二维随机变量 (X_1,Y) 的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示.

（2）证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

【答案】(1) $\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(x)[1+\Phi(y)], x\le y\\ \dfrac{1}{2}\Phi(y)[1+\Phi(x)], x>y\end{cases}$

【解析】$F(x,y)=P\{X_1\le x,Y\le y\}=P\{X_1\le x,X_3X_1+\left(1-X_3\right)X_2\le y\}$

$P\{X_3=0\}P\{X_1\le x,X_3X_1+\left(1-X_3\right)X_2\le y\mid X_3=0\}+P\{X_3=1\}P\{X_1\le x,X_3X_1+\left(1-X_3\right)X_2\le y\mid X_3=1\}$

$\frac{1}{2}P\{X_1\le x,X_2\le y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\le x,X_1\le y\}=\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(\min(x,y))$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(x)[1+\Phi(y)], x\le y\\ \dfrac{1}{2}\Phi(y)[1+\Phi(x)], x>y\end{cases}$$

（2）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X_3X_1+\left(1-X_3\right)X_2\le y\}$

$=P\{X_3=0\}P\{X_3X_1+\left(1-X_3\right)X_2\le y\big|X_3=0\}+P\{X_3=1\}P\{X_3X_1+\left(1-X_3\right)X_2\le y\big|X_3=1\}$

$=\frac{1}{2}P\{X_2\le y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\le y\}=\frac{1}{2}\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y)=\Phi(y)$

23. （本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\ge 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中θ，m为参数且大于零.

（1）求概率$P\{T>t\}$与$P\{T>S+t|T>S\}$，其中$S>0$，$t>0$.

（2）任取n个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为$t_1,t_2,\cdots,t_n$，若m已知，求θ的最大似然估计值$\hat{\theta}$.

【答案】(1) $P\{T>t\}=1-F(t)=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$，$P\{T>S+t|T>S\}=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$

(2) $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\,m}}$

【解析】(2)求得概率密度为 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{mt^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$

构造最大似然函数为 $L(\theta)=m^n(t_1t_2\cdots t_n)^{m-1}\theta^{-nm}e^{-\frac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^{\,m}}$

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln m+(m-1)\ln(t_1t_2\cdots t_n)-nm\ln\theta-\dfrac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^{\,m}$

求导可得 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{nm}{\theta}-+m\dfrac{1}{\theta^{m+1}}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^{\,m}=0$，解出 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^{\,m}}$