**绝密★启用前**

# 2020 年全国硕士研究生招生考试

数学（二）

（科目代码：302）

## 考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 考生须把试题册上的“试卷条形码”粘贴条取下，粘贴在答题卡的“试卷条形码粘贴位置”框中。不按规定粘贴条形码而影响评卷结果的，责任由考生自负。
3. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
4. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔或者钢笔书写，字迹工整、笔记清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
5. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

（以下信息考生必须认真填写）

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 考生编号 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 考生姓名 | | | | | | | | | | | | | | | |

## 一、选择题

（1）$x\to 0^{+}$时，下列无穷小量中最高阶的是

(A) $\int_0^x (\mathrm{e}^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t$

(B) $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})\,\mathrm{d}t$

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2\,\mathrm{d}t$

(D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin t^2}\,\mathrm{d}t$

（2）$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$第二类间断点个数

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

（3）$\int_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=$

(A) $\dfrac{\pi^2}{4}$

(B) $\dfrac{\pi^2}{8}$

(C) $\dfrac{\pi}{4}$

(D) $\dfrac{\pi}{8}$

（4）$f(x)=x^2\ln(1-x)$, $n\geqslant 3$时，$f^{(n)}(0)=$

(A) $-\dfrac{n!}{n-2}$

(B) $\dfrac{n!}{n-2}$

(C) $-\dfrac{(n-2)!}{n}$

(D) $\dfrac{(n-2)!}{n}$

（5）关于函数$f(x,y)=\begin{cases} xy, & xy\neq 0 \\ x, & y=0 \\ y, & x=0 \end{cases}$，给出以下结论

① $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$

② $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

④ $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$

正确的个数是

(A) 4　　(B) 3

(C) 2　　(D) 1

（6）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导，且 $f'(x)>f(x)>0$，则

(A) $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$　　(B) $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}$

(C) $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<\mathrm{e}^2$　　(D) $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<\mathrm{e}^3$

（7）设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆，$a_{12}$ 代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 通解为

(A) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 $k_1,k_2,k_3$ 为任意常数

(B) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 $k_1,k_2,k_3$ 为任意常数

(C) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 $k_1,k_2,k_3$ 为任意常数

(D) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 $k_1,k_2,k_3$ 为任意常数

（8）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值为 1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $-1$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可为

(A) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$　　(B) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$

(C) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$　　(D) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$

## 二、填空题

（9）若 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1},\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}),\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$____.

（10）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x=$____.

（11）设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $\mathrm{d}z|_{(0,\pi)}=$____.

（12）斜边长为$2a$等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐，设重力加速度为$g$，水密度为$\rho$，则该平板一侧所受的水压力为____.

（13）设$y=y(x)$满足$y''+2y'+y=0$，且$y(0)=0$，$y'(0)=1$，则$\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x=$____.

（14）行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$____.

三、解答题

（15）求曲线$y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$的斜渐近线方程.

（16）已知函数$f(x)$连续且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求$g'(x)$并证明$g'(x)$在$x=0$处连续.

（17）$f(x,y)=x^3+8y^3-xy$极值.

（18）待补充.

（19）平面$D$由直线$x=1$，$x=2$，$y=x$与$x$轴围成，计算$\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（20）$f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}x$

（I）证：存在$\xi\in(1,2)$，$f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$；

（II）证：存在$\eta\in(1,2)$，$f(2)=\ln 2\cdot\eta\mathrm{e}^{\eta^2}$.

（21）$f(x)$可导，$f'(x)>0(x\geqslant 0)$过原点$O$上任意点$M$切线与$x$轴交于$T$，$MP\perp x$轴，$y=f(x)$，$MP$，$x$轴围成面积与$\Delta MTP$面积比为$3:2$，求曲线方程.

（22）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$经可逆线性变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$得$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

（I）求$a$的值；

（II）求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$.

（23）设$\boldsymbol{A}$为二阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中$\boldsymbol{\alpha}$是非零向量且不是$\boldsymbol{A}$的特征向量：

（I）证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

（II）若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=0$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.