2020年全国硕士研究生招生考试数学（三）试题参考答案

一、选择题：1~8 小题，第小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1.设 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-a}{x-a}=b$,则$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}$

A. $b\sin a$

B. $b\cos a$

C. $b\sin f(a)$

D. $b\cos f(a)$

答案：B

解析：

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-a]}{x-a}\cos\xi=b\cos a.$$

（其中ξ介于$f(x)$与a之间）

∴选 B

2. $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 第二类间断点个数

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

答案：C

解析：

$x=0,x=2,x=1,x=-1$ 为间断点

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-1}\ln|1+x|}{-2x}=-\frac{e^{-1}}{2}\lim_{x\to0}\frac{\ln|x+1|}{x}=-\frac{e^{-1}}{2}$$

$x=0$ 为可去间断点

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\infty$$

$x=2$ 为第二类间断点

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x-2)} = \infty$$

$x=1$ 为第二类间断点

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x-2)} = \infty$$

$x=-1$ 为第二类间断点

3.设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，则

A. $\int_0^x \left[\cos f(t) + f'(t)\right] dt$ 是奇函数

B. $\int_0^x \left[\cos f(t) + f'(t)\right] dt$ 是偶函数

C. $\int_0^x \left[\cos f'(t) + f(t)\right] dt$ 是奇函数

D. $\int_0^x \left[\cos f'(t) + f(t)\right] dt$ 是偶函数

答案：A

解析：

$$F(x) = \int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] \mathrm{d}t$$

$$F'(x) = \cos f(x) + f'(x)$$

由 $f(x)$ 为奇函数知， $f'(x)$ 为偶函数.

$\cos f(x)$ 为偶函数.故 $F'(x)$ 为偶函数.

$F(x)$ 为奇数 $\therefore$ 选 A

4. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为（-2，6），则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为

A.（-2，6）

B.（-3，1）

C.（-5，3）

D.（-17，15）

答案：B

解析：

由于 $\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{4}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho_2=\rho_1=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore R_2=4.$

$\therefore R_2'=\sqrt{R_2}=2$，故所求收敛域为（-3，1），

$\therefore$ 选 B.

5.设 4 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $A^*x=0$ 的通解为

A. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

B. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$

C. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$

D. $x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$

答案：C

解析：

$\because A$ 不可逆

$\therefore |A|=0$

$\because A_{12}\neq 0$ $\quad\therefore r(A)=3$

$\therefore r(A^*)=1$

$\therefore A^*x=0$ 的基础解系有 3 个线性无关的解向量.

$\because A^*A=|A|E=0$

$\therefore A$ 的每一列都是 $A^*x=0$ 的解

又$\because A_{12}\neq 0$ $\quad\therefore \alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

$\therefore A^*x=0$ 的通解为 $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，故选 C.

6.设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量，α_3 为 A 的属于-1

的特征向量，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 为

A. $(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$

B. $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$

C. $(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_2)$

D. $(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

答案：D

解析：

$A\alpha_1=\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2$

$A\alpha_3=-\alpha_3$

$\because P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\therefore P$ 的 1，3 两列为 1 的线性无关的特征向量 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2$

P 的第 2 列为 A 的属于-1 的特征向量 $-\alpha_3$.

$\therefore P=(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

$\therefore$ 选 D

7. 设 A,B,C 为三个随机事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$,则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{5}{12}$

答案：D

解析：

$P(A\overline{B}\overline{C})=P(A\overline{BUC})=P(A)-P[A(BUC)]$

$$=P(A)-P(AB+AC)$$
$$=P(A)+P(AB)-P(AC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{6}$$

$$P(B\overline{A}\overline{C})=P(B\overline{AUC})=P(B)-P[B(AUC)]$$
$$=P(B)-P(BA)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{6}$$

$$P(C\overline{B}\overline{A})=P(C\overline{BUA})=P(C)-P[CU(BUA)]$$
$$=P(C)-P(CB)-P(CA)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{12}$$

$$P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

8.设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N\left(0,0;1,4;-\frac{1}{2}\right)$，随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

答案：C

解析：

$$D\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\right]=\frac{1}{3}\left[DX+DY\right]+\frac{2}{3}\mathrm{cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}\left[DX+DY\right]+\frac{2}{3}\rho\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}$$

$$=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$$

$$E\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\right]=0$$

$$\therefore\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\sim N(0,1).$$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定的位置上

9.设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$, 则 $\mathrm{d}z\,|_{(0,\pi)}=$________.

解析：

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}[y+\cos(x+y)],\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\pi-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}[x+\cos(x+y)],\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}=-1$$

$$\therefore\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$$

10. 曲线 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 在点（0，-1）处的切线方程为________.

解析：

$$1+y'+e^{2xy}(2y+2xy')=0 \text{ ①}$$

将 $x=0,y=-1$ 代入①得 $y'=1=k.$

$$\therefore y+1=1(x-0)$$

即$y=x-1.$

11.Q 表示产量，成本 $C(Q)=100+13Q$，单价 p，需求量 $Q(P)=\dfrac{800}{P+3}-2.$ 则工厂取得利润最大时的产量为______.

解析：

$$L = QP - C(Q)$$

$$= Q\left(\frac{800}{Q+2} - 3\right) - 100 - 13Q$$

$$= \frac{800Q}{Q+2} - 16Q - 100$$

$$L'(Q) = \frac{1600 - 16(Q+2)^2}{(Q+2)^2} = 0$$

$$\therefore Q = 8$$

12.设平面区域 $D = \left\{(x,y)\left|\frac{x}{2} \le y \le \frac{1}{1+x^2}, 0 \le x \le 1\right.\right\}$，则 D 绕 y 轴旋转所成旋转体体积为______.

解析：

$$\pi\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dy + \pi\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dy$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{2}} 4y^2 dy + \pi\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy$$

$$= \frac{4}{3}\pi y^3\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \pi\left[\ln y\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{8} + \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{3}\right)$$

13.行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

解析：

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

14. 随机变量 X 的概率分布 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k}, k=1,2,3\cdots$,Y 表示 X 被 3 除的余数，则 $E(Y)=$ ______.

解析：

$P\{Y=0\}=P\{X=3k, k=1,2.\text{L}\}$

$P\{Y=1\}=P\{X=3k+1, k=0,1,2.\text{L}\}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{3k+1}}$

$P\{Y=2\}=P\{X=3k+2, k=0,1,2.\text{L}\}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{3k+2}}$

$$E(Y)=1\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k+1}}+2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k+2}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{8}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{8}{7}$$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.已知 a,b 为常数，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 与 $\dfrac{b}{n^a}$，当 $n\to\infty$ 时为等价无穷小，求 a,b.

15.【解】

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-\mathrm{e}}{\frac{b}{n^{a}}}=\frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}n^{a}[\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}]$$

$$=\frac{1}{b}\cdot\lim_{n\to\infty}n^{a}\cdot\mathrm{e}[\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1]$$

$$=\frac{1}{b}\cdot\lim_{n\to\infty}n^{a}\cdot\mathrm{e}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}n^{a}\cdot\mathrm{e}\left[n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^{2}}\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}n^{a-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}$$

$\therefore a-1=0$

$\therefore a=1 \qquad \frac{1}{b}\cdot\left(-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)=1$

$b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$

16.求二元函数 $f(x,y)=x^{3}+8y^{3}-xy$ 的极值

解析：
.求一阶导可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^{2}-y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=24y^{2}-x$$

令$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$可得$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\begin{cases}x=\frac{1}{6}\\ y=\frac{1}{12}\end{cases}$

求二阶导可得

$$\frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}}=6x \quad \frac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}y}=-1 \quad \frac{\partial^{2}f}{\partial y^{2}}=48y$$

当 $x=0,y=0$时. $A=0.B=-1.C=0^{-}$

$AC-B^2<0$ 故不是极值.

当 $x=\dfrac{1}{6}\ y=\dfrac{1}{12}$ 时

$A=1.B=-1.C=4.$

$AC-B^2>0.A=1>0$ 故 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 且极小值

极小值 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=\left(\dfrac{1}{6}\right)^3+8\left(\dfrac{1}{12}\right)^3-6\times\dfrac{1}{12}=-\dfrac{1}{216}$

17.若 $y''+2y'+5y=0, f(0)=1, f'(0)=-1$，则

（1）求 $f(x)$

（2）$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，求 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_n$

解析：

（1）$y''+2y'+5y=0$ 的特征方程为 $r^2+2r+5=0$

$\therefore r_{1,2}=-1\pm 2i$

$\therefore y(x)=\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

$y'(x)=-\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+\mathrm{e}^{-x}(-2c_1\sin 2x+2c_2\cos 2x)$

$\because y(0)=1, y'(0)=-1$

$\therefore c_1=1, c_2=0$

$\therefore y(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$

（2）$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$

$$=-\int_{n\pi}^{+\infty}\cos 2x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-x}=-\cos 2x\cdot\mathrm{e}^{-x}\Big|_{n\pi}^{+\infty}+\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\cos 2x$$

$$=-\mathrm{e}^{-n\pi}-2\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin 2x\,\mathrm{d}\,x$$

$$=-\mathrm{e}^{-n\pi}+2\int_{n\pi}^{+\infty}\sin 2x\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-x}$$

$$=-\mathrm{e}^{-n\pi}+2\sin 2x\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_{n\pi}^{+\infty}-2+\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}\,x$$

$$\therefore 5a_n=-\mathrm{e}^{-n\pi}$$

$$\therefore a_n=-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-n\pi}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=-\frac{1}{5}[\mathrm{e}^{-\pi}+\mathrm{e}^{-2\pi}+\cdots+\mathrm{e}^{-n\pi}]$$

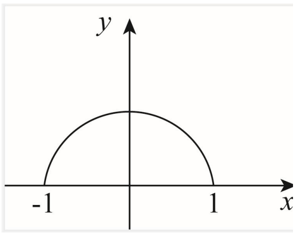
$$=-\frac{1}{5}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\pi}[1-\mathrm{e}^{-n\pi}]}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}$$

$$=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}-1}$$

18. $f(x,y)=y^{\sqrt{1-x^2}}+x\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中

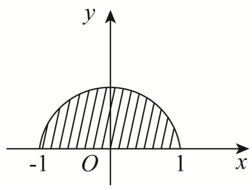
$$D=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0\end{matrix}\right\}$$

求 $\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}\sigma$



解析：

积分区域 D 如图： $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 两边积分得



$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{x=\sin t}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{3\pi}{16}$$

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

所以 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{16}$

$$f(x,y) = y\sqrt{1-x^2} + \frac{3\pi}{16}x$$

从而 $\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D xy\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D \frac{3\pi}{16}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \frac{3}{16}\pi\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{3}{16}\pi\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\mathrm{d}y$$

$$= \frac{3}{16}\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{x=\sin t}}\frac{3\pi}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3\pi}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3\pi}{16}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{256}$$

19. $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续导数，$M = \max\{|f(x)|\}, x\in[0,2]$

（1）证 $\exists\xi\in[0,2]$ $\quad M \le |f'(\xi)|$

（2）若 $\forall x\in[0,2]$ $\quad |f'(x)| \le M$ 则$M = 0$

解析：

证明：（1）由 $M = \max\{|f(x)|\}$，$x\in[0,2]$ 知存在 $c\in[0,2]$，使 $|f(c)| = M$，

若 $c\in[0,1]$ 由拉格朗日中值定理得至少存在一点 $\xi\in(0,c)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{f(c)}{c}$$

从而$|f'(\xi)|=\frac{|f(c)|}{c}=\frac{M}{c}\geq M$

若$c\in[1,2]$，同理存在$\xi\in(c,2)$使

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(c)}{2-c}=\frac{-f(c)}{2-c}$$

从而$|f'(\xi)|=\frac{|f(c)|}{2-c}=\frac{M}{2-c}\geq M$

综上，存在$\xi\in(0,2)$，使$|f'(\xi)|\geq M$.

（2）若$M>0$，则$c\neq 0,2$.

由$f(0)=f(2)=0$及罗尔定理知，存在$\eta\in(0,2)$，使$f'(\eta)=0,$

当$\eta\in(0,c]$时，

$$f(c)-f(0)=\int_0^c f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$M=|f(c)|=|f(c)-f(0)|\leq\int_0^c|f'(x)|\,\mathrm{d}x<Mc,$$

又$f(2)-f(c)=\int_c^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$

$$M=|f(c)|=|f(2)-f(c)|\leq\int_c^2|f'(x)|\,dx\leq M(2-c)$$

于是$2M<Mc+M(2-c)=2M$矛盾.

故$M=0$.

20. 设二次型$f(x_1,x_2)=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2$经正交变换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$化为二次型$g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中$a\geq b$.

（1）求a,b的值.

（2）求正交矩阵Q.

解析：

（1）设 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{bmatrix}$

由题意可知 $Q^{\mathrm{T}}AQ=Q^{-1}AQ=B$.

∴A 合同相似于 B

$$\therefore \begin{cases} 1+4=a+b \\ ab=4 \end{cases} \quad a\ge b$$

$\therefore a=4.\quad b=1$

（2）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda$

∴A 的特征值为 0，5

当 $\lambda=0$ 时，解 $(0E-A)x=0$.得基础解为

$$\alpha_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

当 $\lambda=5$ 时，解 $(5E-A)x=0$ 得基础解为

$$\alpha_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

又 B 的特征值也为 0，5

当 $\lambda=0$ 时，解 $(0E-B)x=0$ 得

$$\beta_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\alpha_2$$

当 $\lambda=5$ 时，解 $(5E-B)x=0$ 得

$$\beta_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\alpha_1$$

对 α_1,α_2 单位化

$$\gamma_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

$$\gamma_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{-2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

令$Q_1=[\gamma_1,\gamma_2],Q_2=[\gamma_2,\gamma_1]$

则$Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&5\end{bmatrix}=Q_2^{\mathrm{T}}BQ_2$

故$Q_2Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1Q_2^{\mathrm{T}}=B$

可令

$$Q=Q_1Q_2^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

21.设A为2阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中α是非零向量且不是A的特征向量.

（1）证明P为可逆矩阵

（2）若$A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求$P^{-1}AP$，并判断$A$是否相似于对角矩阵.

解析：

(1) $\alpha\neq0$且$A\alpha\neq\lambda\alpha$.

故α与$A\alpha$线性无关.

则$r(\alpha,A\alpha)=2$

则P可逆.

$AP = A(\alpha, A\alpha)$
$= (A\alpha, A^2 x)$
$= (\alpha A\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

故$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(2)由 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$

设$\begin{matrix}(A^2 + A - 6E)\alpha = 0 \\ (A+3E)(A-2E)\alpha = 0\end{matrix}$

由$\alpha \neq 0$得$(A^2 + A - 6E)x = 0$有非零解

故$|(A+3E)(A-2E)| = 0$

得$|A+3E| = 0$或$|A-2E| = 0$

若$|(A+3E)| \neq 0$则有$(A-2E)\alpha = 0$故$A\alpha = 2\alpha$与题意矛盾

故$|A+3E| = 0$同理可得$|A-2E| = 0$

于是 A 的特征值为$\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 2$.

A 有 2 个不同特征值故 $A\alpha$ 相似对角化

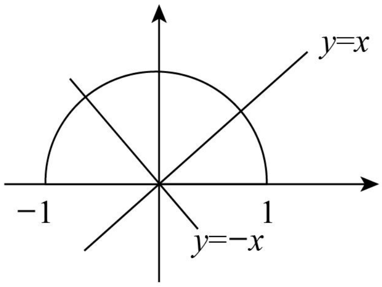
22.二维随机变量(X,Y)在$D = \left\{(x,y) \middle| 0 < y < \sqrt{1-x^2}\right\}$上服从均匀分布

$Z_1 = \begin{cases} 1 & X - Y > 0 \\ 0 & X - Y \leq 0 \end{cases}$，　　$Z_2 = \begin{cases} 1 & X + Y > 0 \\ 0 & X + Y \leq 0 \end{cases}$

（1）求(Z_1, Z_2)联合分布

（2）$\rho_{Z_1 Z_2}$

解析：

（1）

(x,y) 服从均匀分布则 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi},0<y<\sqrt{1-x^2}\\0,其他\end{cases}$

则 $P\{Z_1=0,Z_2=0\}=P\{X\le Y,X\le -Y\}=\frac{1}{4}$

$P\{Z_1=0,Z_2=1\}=P\{X\le Y,Y>-X\}=\frac{1}{2}$

$P\{Z_1=1,Z_2=0\}=P\{X>Y,X\le -Y\}=0$

$P\{Z_1=1,Z_2=1\}=P\{X>Y;X>-Y\}=\frac{1}{4}$

（2）Z_1,Z_2 的相关系数 $\rho=\frac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}$

$$=\frac{EZ_1Z_2-EZ_1EZ_2}{\sqrt{EZ_1^2-(EZ_1)^2}\sqrt{EZ_2^2-(EZ_2)^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\sqrt{\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2}}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{16}}=\frac{1}{3}.$$

23.设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\ge 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

（1）求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>S+t\mid T>S\}$，其中 $S>0,t>0$.

（2）任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2\cdots,t_n$，若 m 已知，求

θ的最大似然估计值$\hat{\theta}$.

解析：

（1） $P\{T>t\}=1-F(t)=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$

$P\{T>s+t|T>s\}=P\{T>t\}=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$

(2) $f(t)=F'(t)=\begin{cases} m\bullet\theta^{-m}\bullet t^{m-1}.e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geq 0 \\ 0 & else \end{cases}$

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f\left(t_i, \theta\right)$

$=\begin{cases} m^n\theta^{-mn}\left(t_1\cdots t_n\right)^{m-1}e^{-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m} & t_i\geq 0 \\ 0 & else \end{cases}$

当 $t_1\geq 0, t_2\geq 0, \cdots, t_n\geq 0$ 时

$L(\theta)=m^n\bullet\theta^{-mn}\left(t_1\cdots t_n\right)^{m-1}e^{-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m+1)\sum_{i=1}^{n}\ln t_i-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\ m}$

求导数 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{mn}{\theta}+m\theta^{-(m+1)}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\ m}$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$ 解得 $\theta=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\ m}}$

所以 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\ m}}$